

**EPFL**

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Examen : physique générale II
Date : vendredi 21 juin 2024
Durée : 9h15 - 12h45

**1**

Corrigé

N° SCIPER :

SECTION :

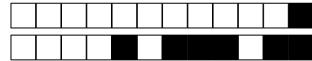
SALLE / PLACE : /

L'examen est constitué de 3 problèmes qui totalisent 57 points avec 4 points bonus additionnels. Chaque problème comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques d'un problème doivent être effectués et rédigés proprement sur les pages quadrillées à la fin du problème.

N°	VISA	POINTS
1		
2		
3		

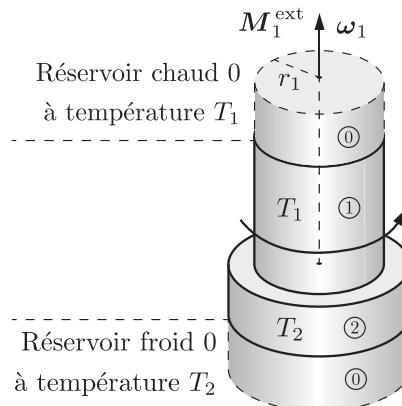
Consignes

- Préparer votre **carte Camipro**, la poser visiblement sur la table et vérifier votre **N° Sciper**.
- Attendre le début de l'épreuve **avant d'ouvrir** le cahier d'examen.
- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Un **dictionnaire bilingue** non annoté est autorisé pour les étudiant.e.s **non francophones**.
- Effectuer les **développements mathématiques et physiques** d'un problème sur les **pages quadrillées** à la fin du problème.
- Retranscrire les **réponses** sur les pointillés sous chaque question dans les espaces réservés à cet effet.
- Utiliser un **stylo à encre noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Ne **pas dégrader** le cahier d'examen et laisser le **tableau** et les **cases blanches vides**.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas ramassées et pas corrigées**.
- Il est recommandé de résoudre les questions **bonus** à la fin de l'examen si le temps le permet.


Problème 1 : Frottement stationnaire entre des cylindres métalliques (19 points)

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 11	<input type="checkbox"/> 12	<input type="checkbox"/> 13	<input type="checkbox"/> 14	<input type="checkbox"/> 15
<input type="checkbox"/> 16	<input type="checkbox"/> 17	<input type="checkbox"/> 18	<input type="checkbox"/> 19												

Laisser les cases blanches vides



Un système thermodynamique, formé de deux cylindres métalliques rigides de même axe de symétrie vertical, est en régime stationnaire. Le sous-système 1 est constitué du cylindre supérieur qui est entraîné par un moment de force extérieure M_1^{ext} et tourne à vitesse angulaire constante $\omega_1 = \text{cste}$ dans le sens trigonométrique autour de l'axe de symétrie en vue d'avion. Le cylindre inférieur est le sous-système 2 qui est maintenu immobile.

En régime stationnaire, le moment de force de frottement exercé par le cylindre inférieur 2 sur le cylindre supérieur 1 de rayon r_1 est $M_1^{\text{fr}} = -\lambda_1 r_1 \omega_1$ où $\lambda_1 > 0$. Le moment cinétique du cylindre supérieur est $\mathbf{L}_1 = I_1 \omega_1$ où $I_1 > 0$ est son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Les cylindres 1 et 2 sont des sous-systèmes simples, rigides, constitués de N_1 et N_2 moles d'atomes respectivement. L'interface entre les cylindres est diatherme et imperméable. Le cylindre 1 est maintenu à température constante T_1 par le réservoir chaud 0 et le cylindre 2 est maintenu à température constante T_2 par le réservoir froid 0. Ces deux réservoirs de chaleur 0 sont considérés comme l'environnement du système. Le cylindre supérieur a la même vitesse angulaire que le réservoir chaud avec lequel il est à l'équilibre thermique. Les températures des cylindres satisfont la relation d'ordre $T_1 > T_2$.

Etant donné que le système est en régime stationnaire, l'énergie, l'énergie cinétique, l'énergie interne et l'entropie de chaque cylindre ainsi que le moment cinétique du cylindre supérieur sont des constantes.

Les réponses doivent être exprimées en termes des températures T_1 et T_2 , des nombres de moles d'atomes N_1 et N_2 , du moment d'inertie I_1 , de la norme de la vitesse angulaire ω_1 , du coefficient λ_1 , du rayon r_1 , de la constante des gaz parfaits R et des grandeurs scalaires spécifiées de l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (2 points) Ecrire l'énergie totale E du système.

Les variables d'état extensives du système sont le moment cinétique $\mathbf{L}_1 (\omega_1)$ du cylindre supérieur 1 et les entropies $S_1 (T_1)$ et $S_2 (T_2)$ des deux cylindres qui sont fonctions de leurs températures T_1 et T_2 . L'énergie totale $E (\mathbf{L}_1 (\omega_1), S_1 (T_1), S_2 (T_2))$ du système est la somme de l'énergie cinétique de rotation du cylindre supérieur 1 et des énergies internes des deux cylindres,

$$E (\mathbf{L}_1 (\omega_1), S_1 (T_1), S_2 (T_2)) = \frac{\mathbf{L}_1^2}{2 I_1} + U_1 (S_1 (T_1)) + U_2 (S_2 (T_2)) \quad (1)$$

Compte tenu du moment cinétique du cylindre supérieur,

$$\mathbf{L}_1 (\omega_1) = I_1 \omega_1 \quad (2)$$

et des énergies internes des deux cylindres métalliques,

$$U_1 (S_1 (T_1)) = 3N_1 RT_1 \quad \text{et} \quad U_2 (S_2 (T_2)) = 3N_2 RT_2 \quad (3)$$

l'énergie totale (1) devient,

$$E (\mathbf{L}_1 (\omega_1), S_1 (T_1), S_2 (T_2)) = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + 3R(N_1 T_1 + N_2 T_2) \quad (4)$$

2. (3 points) Déterminer la puissance extérieure P^{ext} exercée sur le système. En déduire le courant de chaleur total I_Q entre le système et les réservoirs de chaleur (l'environnement) en régime stationnaire.

En régime stationnaire, le moment cinétique du premier cylindre \mathbf{L}_1 est constant. Ainsi, l'équation de bilan de moment cinétique appliquée au cylindre supérieur 1 s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_1 = \mathbf{M}_1^{\text{ext}} + \mathbf{M}_1^{\text{fr}} = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{M}_1^{\text{ext}} = -\mathbf{M}_1^{\text{fr}} \quad (5)$$

où le moment de force de frottement \mathbf{M}_1^{fr} est intérieur au système mais extérieur au cylindre 1. La puissance extérieure due au moment de force extérieur d'entraînement $\mathbf{M}_1^{\text{ext}}$ s'écrit alors,

$$P^{\text{ext}} = \mathbf{M}_1^{\text{ext}} \cdot \omega_1 = -\mathbf{M}_1^{\text{fr}} \cdot \omega_1 = \lambda_1 r_1 \omega_1^2 > 0 \quad (6)$$

En régime stationnaire, l'énergie totale E est constante, c'est-à-dire $\dot{E} = 0$. Etant donné que les cylindres sont rigides et fermés, le premier principe s'écrit,

$$\dot{E} = I_Q + P^{\text{ext}} = 0 \quad (7)$$

Ainsi, le courant de chaleur qui évacue la chaleur dissipée par frottement dans le système s'écrit,

$$I_Q = -P^{\text{ext}} = -\lambda_1 r_1 \omega_1^2 < 0 \quad (8)$$

3. (3 points) Déterminer le courant d'entropie I_S entre le système et les réservoirs de chaleur et la source d'entropie Σ_S du système en termes des courants d'entropie $I_S^{1 \rightarrow 2}$ et $I_S^{2 \rightarrow 1}$ entre les sous-systèmes en régime stationnaire.

En régime stationnaire, les équations de bilan d'entropie des deux cylindres s'écrivent,

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= I_S^{0 \rightarrow 1} + I_S^{2 \rightarrow 1} = 0 & \text{ainsi} & \quad I_S^{0 \rightarrow 1} = -I_S^{2 \rightarrow 1} \\ \dot{S}_2 &= I_S^{0 \rightarrow 2} + I_S^{1 \rightarrow 2} = 0 & \text{ainsi} & \quad I_S^{0 \rightarrow 2} = -I_S^{1 \rightarrow 2} \end{aligned} \quad (9)$$

Le courant d'entropie I_S entre l'environnement et le système est la somme des courants d'entropie entre les réservoirs de chaleur et les cylindres 1 et 2,

$$I_S = I_S^{0 \rightarrow 1} + I_S^{0 \rightarrow 2} = -(I_S^{1 \rightarrow 2} + I_S^{2 \rightarrow 1}) < 0 \quad (10)$$



En régime stationnaire, l'équation de bilan d'entropie du système s'écrit,

$$\dot{S} = I_S + \Sigma_S = 0 \quad (11)$$

Par conséquent, la source d'entropie décrivant le transfert irréversible de chaleur entre les cylindres est,

$$\Sigma_S = -I_S = I_S^{1 \rightarrow 2} + I_S^{2 \rightarrow 1} > 0 \quad (12)$$

4. (3 points) Montrer que la somme des courants de chaleur $I_Q^{1 \rightarrow 2}$ et $I_Q^{2 \rightarrow 1}$ entre les deux cylindres en régime stationnaire s'écrit,

$$I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_Q^{2 \rightarrow 1} = \lambda_1 r_1 \omega_1^2$$

En régime stationnaire, le premier principe appliqué à chaque cylindre s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= I_Q^{0 \rightarrow 1} + I_Q^{2 \rightarrow 1} = 0 & \text{ainsi} & \quad I_Q^{0 \rightarrow 1} = -I_Q^{2 \rightarrow 1} \\ \dot{U}_2 &= I_Q^{0 \rightarrow 2} + I_Q^{1 \rightarrow 2} = 0 & \text{ainsi} & \quad I_Q^{0 \rightarrow 2} = -I_Q^{1 \rightarrow 2} \end{aligned} \quad (13)$$

Le courant de chaleur est la somme des courants de chaleur entre le réservoir et le sous-systèmes,

$$I_Q = I_Q^{0 \rightarrow 1} + I_Q^{0 \rightarrow 2} = - (I_Q^{2 \rightarrow 1} + I_Q^{1 \rightarrow 2}) \quad (14)$$

Compte tenu de la relation (8), la somme des courants de chaleur entre les deux sous-systèmes s'écrit,

$$I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_Q^{2 \rightarrow 1} = -I_Q = P^{\text{ext}} = \lambda_1 r_1 \omega_1^2 > 0 \quad (15)$$

5. (2 points) Montrer que les courants de chaleur $I_Q^{1 \rightarrow 2}$ et $I_Q^{2 \rightarrow 1}$ entre les deux cylindres en régime stationnaire satisfont la relation suivante,

$$T_1 I_Q^{1 \rightarrow 2} + T_2 I_Q^{2 \rightarrow 1} > 0$$

Les courants de chaleurs s'écrivent en termes des courants d'entropie comme,

$$I_Q^{1 \rightarrow 2} = T_2 I_S^{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad I_Q^{2 \rightarrow 1} = T_1 I_S^{2 \rightarrow 1} \quad (16)$$

Compte des relations (16) entre les courants, la source d'entropie (12) pour le transfert irréversible de chaleur est exprimée en termes des courants de chaleur comme,

$$\Sigma_S = \frac{I_Q^{1 \rightarrow 2}}{T_2} + \frac{I_Q^{2 \rightarrow 1}}{T_1} = \frac{T_1 I_Q^{1 \rightarrow 2} + T_2 I_Q^{2 \rightarrow 1}}{T_1 T_2} > 0 \quad (17)$$

6. (3 points) Durant un intervalle de temps quelconque $\Delta t_{i \rightarrow f} = t_f - t_i$, déterminer en régime stationnaire la chaleur échangée $Q_{i \rightarrow f}^+$ entre le cylindre supérieur et le réservoir chaud à température T_1 , la chaleur échangée $Q_{i \rightarrow f}^-$ entre le cylindre inférieur et le réservoir froid à température T_2 , et le travail $W_{i \rightarrow f}^{\text{ext}}$ effectué sur le système en termes des courants de chaleur $I_Q^{1 \rightarrow 2}$ et $I_Q^{2 \rightarrow 1}$ entre les cylindres.

En régime stationnaire, compte tenu de la relation (13), la chaleur échangée entre le cylindre 1 et le réservoir chaud s'écrit,

$$Q_{i \rightarrow f}^+ = \int_{t_i}^{t_f} I_Q^{0 \rightarrow 1} dt = I_Q^{0 \rightarrow 1} \int_{t_i}^{t_f} dt = I_Q^{0 \rightarrow 1} \Delta t_{i \rightarrow f} = -I_Q^{2 \rightarrow 1} \Delta t_{i \rightarrow f} \quad (18)$$

et la chaleur échangée entre le cylindre 2 et le réservoir froid s'écrit,

$$Q_{i \rightarrow f}^- = \int_{t_i}^{t_f} I_Q^{0 \rightarrow 2} dt = I_Q^{0 \rightarrow 2} \int_{t_i}^{t_f} dt = I_Q^{0 \rightarrow 2} \Delta t_{i \rightarrow f} = -I_Q^{1 \rightarrow 2} \Delta t_{i \rightarrow f} \quad (19)$$

Compte tenu de la relation (15), le travail extérieur effectué sur le système durant un intervalle de temps quelconque $\Delta t_{i \rightarrow f}$ s'écrit,

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{ext}} = \int_{t_i}^{t_f} P^{\text{ext}} dt = P^{\text{ext}} \int_{t_i}^{t_f} dt = P^{\text{ext}} \Delta t_{i \rightarrow f} = (I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_Q^{2 \rightarrow 1}) \Delta t_{i \rightarrow f} > 0 \quad (20)$$



7. (3 points) Déterminer l'énergie libre $F(T_1, T_2)$ du système.

L'énergie interne du système $U(S_1(T_1), S_2(T_2))$ est la somme des énergie internes des sous-systèmes,

$$U(S_1(T_1), S_2(T_2)) = T_1 S_1(T_1) + T_2 S_2(T_2) \quad (21)$$

L'énergie libre du système F et obtenue ne faisant une transformation de Legendre de l'énergie interne par rapport aux entropies S_1 et S_2 ,

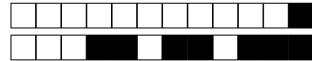
$$F(T_1, T_2) = U(S_1(T_1), S_2(T_2)) - \frac{\partial U(S_1(T_1), S_2(T_2))}{\partial S_1(T_1)} S_1(T_1) - \frac{\partial U(S_1(T_1), S_2(T_2))}{\partial S_2(T_2)} S_2(T_2) \quad (22)$$

Compte tenu de l'énergie interne (21) et des températures des cylindres,

$$T_1 = \frac{\partial U(S_1(T_1), S_2(T_2))}{\partial S_1(T_1)} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{\partial U(S_1(T_1), S_2(T_2))}{\partial S_2(T_2)} \quad (23)$$

L'énergie libre du système (22) est nulle,

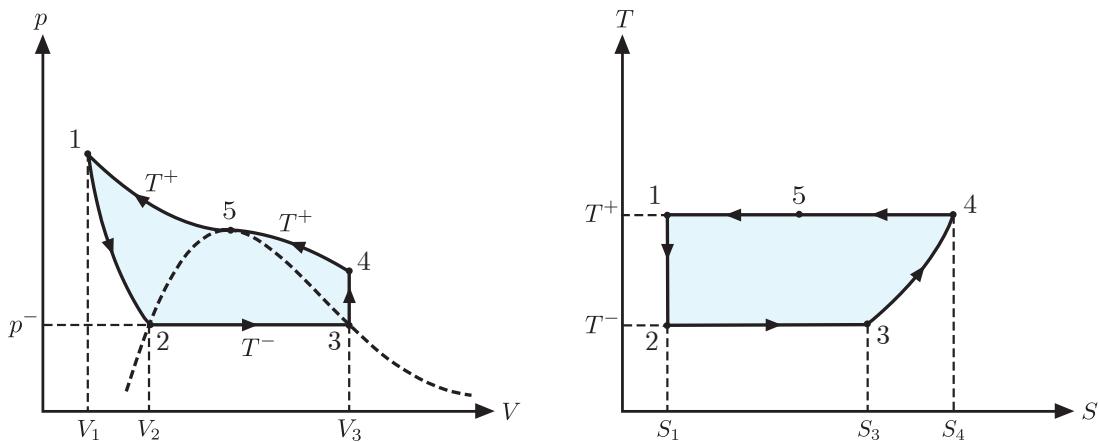
$$F(T_1, T_2) = 0 \quad (24)$$



Problème 2 : Cycle calorifique critique d'un fluide de van der Waals (21 points)

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 11	<input type="checkbox"/> 12	<input type="checkbox"/> 13	<input type="checkbox"/> 14	<input type="checkbox"/> 15
<input type="checkbox"/> 16	<input type="checkbox"/> 17	<input type="checkbox"/> 18	<input type="checkbox"/> 19	<input type="checkbox"/> 20	<input type="checkbox"/> 21										

Laisser les cases blanches vides



Un fluide de van der Waals constitué de N moles est contenu dans un cylindre fermé. Le cycle calorifique que subit ce fluide biphasique est formé de cinq processus :

- $1 \rightarrow 2$ détente adiabatique réversible,
- $2 \rightarrow 3$ vaporisation à la pression p^- et la température T^- de la source froide,
- $3 \rightarrow 4$ compression isochore réversible à volume V_3 ,
- $4 \rightarrow 5$ compression isotherme réversible à la température T^+ de la source chaude,
- $5 \rightarrow 1$ compression isotherme réversible à la température T^+ de la source chaude.

Le cycle passe par le point critique qui correspond à l'état 5 sur le diagramme (p, V). La courbe de saturation est représentée en traitillé. L'équation d'état du fluide de van der Waals est donnée par,

$$p = \frac{NRT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

et son énergie interne et sa différentielle s'écrivent,

$$U = cNRT - \frac{aN^2}{V} \quad \text{et} \quad dU = cNRdT + \frac{aN^2}{V^2} dV$$

Les réponses doivent être exprimées en termes de la température T^+ de la source chaude, de la température T^- de la source froide, des volumes V_1, V_2, V_3 , de la pression p^- et du nombre N de moles de fluide, de la constante des gaz parfaits R , des paramètres a, b et c et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (3 points) Esquisser qualitativement le diagramme (T, S) du cycle sur l'énoncé ci-contre en indiquant les états 1 à 5 et en définissant l'orientation des processus avec des flèches.

La détente adiabatique $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température décroissante,

$$S_1 = S_2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T^+ = T_1 > T_2 = T^- \quad (1)$$

La vaporisation isotherme $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (T, S) par segment horizontal d'entropie croissante,

$$T_- = T_2 = T_3 = \text{cste} \quad \text{et} \quad S_2 < S_3 \quad (2)$$

La compression isochore $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (T, S) par une courbe convexe de température croissante et d'entropie croissante,

$$\frac{T^+}{T^-} = \frac{T_4}{T_3} = \exp\left(\frac{S_4 - S_3}{cNR}\right) > 1 \quad (3)$$

car à volume constant la différentielle de l'entropie est la même que celle d'un gaz parfait,

$$dS = \frac{dU}{T} = \frac{cNRdT}{T} \quad \text{ainsi} \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4} = S_4 - S_3 = cNR \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) = cNR \ln\left(\frac{T^+}{T^-}\right) \quad (4)$$

La compression isotherme $4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment horizontal d'entropie décroissante,

$$T_+ = T_4 = T_5 = T_1 = \text{cste} \quad \text{et} \quad S_4 > S_5 > S_1 \quad (5)$$

2. (2 points) Durant un processus quelconque, montrer que la différentielle de l'entropie dS s'écrit,

$$dS = \frac{cNRdT}{T} + \frac{NRdV}{V - Nb}$$

D'après la relation de Gibbs, durant un processus quelconque, la différentielle de l'entropie s'écrit,

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p dV}{T} = \frac{cNRdT}{T} + \frac{aN^2}{V^2T} dV + \frac{NRdV}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2T} dV = \frac{cNRdT}{T} + \frac{NRdV}{V - Nb} \quad (6)$$

3. (3 points) Calculer le travail $W_{4 \rightarrow 5}$ effectué sur le fluide de van der Waals par l'environnement durant la compression isotherme $4 \rightarrow 5$ à température T^+ . *Indice :* si vous ne parvenez pas à identifier le volume critique V_5 , supposez le connu.

Le travail effectué sur le fluide de van der Waals durant la compression isotherme $4 \rightarrow 5$ à température T^+ s'écrit,

$$W_{4 \rightarrow 5} = - \int_4^5 p dV = - NR T^+ \int_{V_3}^{V_5} \frac{dV}{V - Nb} + a N^2 \int_{V_3}^{V_5} \frac{dV}{V^2} \quad (7)$$

où $V_3 = V_4$. Le résultat de l'intégrale (7) s'écrit,

$$W_{4 \rightarrow 5} = NR T^+ \ln\left(\frac{V_3 - Nb}{V_5 - Nb}\right) - a N^2 \left(\frac{1}{V_5} - \frac{1}{V_3}\right) > 0 \quad (8)$$

L'état 5 de température T^+ sur le diagramme (p, V) correspond au point critique. Il est défini par le fait que les dérivées partielles première et deuxième de la pression par rapport au volume s'annulent,

$$\frac{\partial p(V, T)}{\partial V} \Big|_{V_5, T^+} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 p(V, T)}{\partial V^2} \Big|_{V_5, T^+} = 0 \quad (9)$$



ce qui se traduit par les identités,

$$-\frac{NRT^+}{(V_5 - Nb)^2} + \frac{2aN^2}{V_5^3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2NRT^+}{(V_5 - Nb)^3} - \frac{6aN^2}{V_5^4} = 0 \quad (10)$$

En divisant la première par la deuxième, on obtient le volume critique,

$$V_5 = 3Nb \quad (11)$$

A l'aide du volume critique (11), le travail (8) effectué durant la compression isotherme $4 \rightarrow 5$ à température T^+ devient,

$$W_{4 \rightarrow 5} = NRT^+ \ln \left(\frac{V_3 - Nb}{2Nb} \right) - aN^2 \left(\frac{1}{3Nb} - \frac{1}{V_3} \right) > 0 \quad (12)$$

où $V_3 > V_5 = 3Nb$.

4. (**2 points**) Calculer la variation d'énergie libre $\Delta F_{4 \rightarrow 1}$ du fluide de van der Waals durant la compression isotherme $4 \rightarrow 1$ à température T^+ .

Durant la compression isotherme $4 \rightarrow 1$, le fluide de van der Waals est à l'équilibre thermique avec la source chaude à température T^+ qui est un réservoir de chaleur. Ainsi, la variation d'énergie libre est égale au travail effectué sur le fluide,

$$\Delta F_{4 \rightarrow 1} = W_{4 \rightarrow 1} = - \int_{V_4}^{V_1} p dV = -NRT^+ \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V - Nb} + aN^2 \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V^2} \quad (13)$$

où $V_3 = V_4$. Le résultat de l'intégrale (13) s'écrit,

$$\Delta F_{4 \rightarrow 1} = -NRT^+ \ln \left(\frac{V_1 - Nb}{V_3 - Nb} \right) - aN^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_3} \right) > 0 \quad (14)$$

5. (**2 points**) Déterminer le coefficient de compressibilité isotherme χ_T et la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell \rightarrow g}$ au point critique dans l'état 5 quasiment sans faire de calcul.

Compte tenu de la première condition (9), le coefficient de compressibilité isotherme χ_T diverge au point critique,

$$\chi_T = - \frac{1}{V_5} \frac{\partial V(p, T)}{\partial p} \Big|_{p_5, T^+} = - \frac{1}{V_5} \left(\frac{\partial p(V, T)}{\partial V} \Big|_{V_5, T^+} \right)^{-1} = \infty \quad (15)$$

où le signe est positif lorsqu'on tend vers le point critique le long de l'isotherme critique. Au point critique à température T^+ , il n'y a pas de discontinuité de l'entropie, ce qui signifie que l'entropie molaire du liquide s_ℓ est égale à l'entropie molaire du gaz s_g ,

$$\ell_{\ell \rightarrow g} = T^+ (s_g - s_\ell) = 0 \quad (16)$$

6. (**4 points**) Calculer la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ fournie au liquide de van der Waals durant la vaporisation et l'exprimer explicitement en termes de la pression de vaporisation p^- . En déduire la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell \rightarrow g}$ qu'il faut fournir au liquide de van der Waals pour qu'il se transforme entièrement en gaz durant la vaporisation $2 \rightarrow 3$.

La vaporisation $2 \rightarrow 3$ est un processus isobare à pression p^- . Par conséquent, le travail réalisé par le fluide de van der Waals sur l'environnement à la pression de vaporisation p^+ s'écrit,

$$W_{2 \rightarrow 3} = - \int_2^3 p dV = -p^- \int_{V_2}^{V_3} dV = -p^- (V_3 - V_2) < 0 \quad (17)$$



La variation d'énergie interne du fluide de Van der Waals durant la vaporisation à température constante T^- s'écrit,

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = U_3 - U_2 = N^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} \right) > 0 \quad (18)$$

Compte tenu du premier principe, la chaleur fournie au fluide durant la vaporisation $2 \rightarrow 3$ s'écrit,

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = N^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} \right) + p^- (V_3 - V_2) > 0 \quad (19)$$

La chaleur latente molaire de vaporisation ℓ_{fg} est le rapport de la chaleur fournie $Q_{2 \rightarrow 3}$ au fluide de van der Waals par la source froide durant la vaporisation et du nombre N de moles,

$$\ell_{\text{fg}} = \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{N} = Na \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} \right) + \frac{p^-}{N} (V_3 - V_2) > 0 \quad (20)$$

7. (3 points) Durant la détente adiabatique $1 \rightarrow 2$, montrer que la température T et le volume V du fluide de van der Waals satisfont la relation suivante,

$$T(V - Nb)^{\gamma-1} = \text{cste} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{c+1}{c}$$

D'après la relation de Gibbs, durant un processus adiabatique réversible, la différentielle de l'entropie (15) est nulle,

$$dS = \frac{c NR dT}{T} + \frac{NR dV}{V - Nb} = 0 \quad (21)$$

Par conséquent, la variation d'entropie durant la détente adiabatique $1 \rightarrow 2$ est nulle aussi,

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \int_{S_1}^{S_2} dS = c NR \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + NR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - Nb} = 0 \quad (22)$$

La solution de cette relation intégrale est,

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = c NR \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + NR \ln \left(\frac{V_2 - Nb}{V_1 - Nb} \right) = 0 \quad (23)$$

En divisant la relation (23) par la capacité thermique isochore $c NR$, on obtient l'identité,

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \ln \left(\frac{V_2 - Nb}{V_1 - Nb} \right)^{\frac{1}{c}} = 0 \quad (24)$$

Compte tenu de l'inverse du paramètre c ,

$$\frac{1}{c} = \gamma - 1 \quad (25)$$

l'identité (24) peut être remise sous la forme,

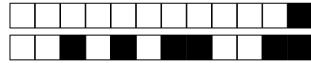
$$\ln \left(\frac{T_2 (V_2 - Nb)^{\gamma-1}}{T_1 (V_1 - Nb)^{\gamma-1}} \right) = 0 \quad (26)$$

Par conséquent, l'argument du logarithme doit être égal à l'unité,

$$T_2 (V_2 - Nb)^{\gamma-1} = T_1 (V_1 - Nb)^{\gamma-1} \quad (27)$$

ce qui implique que,

$$T (V - Nb)^{\gamma-1} = \text{cste} \quad (28)$$



8. (**BONUS : 2 points**) La vaporisation peut être modélisée comme une réaction chimique a de vitesse de réaction Ω_a entre le liquide, considéré comme le réactif de coefficient stœchiométrique $\nu_{a\ell}$ et de potentiel chimique μ_ℓ , et le gaz, considéré comme le produit de coefficient stœchiométrique ν_{ag} et de potentiel chimique μ_g . Déterminer l'affinité \mathcal{A}_a de la réaction chimique et en déduire la source d'entropie Σ_S durant la vaporisation.

Comme le liquide de van der Waals est entièrement transformé en gaz de van der Waals durant la vaporisation $2 \rightarrow 3$, le coefficient stœchiométrique négatif du liquide est l'opposé du coefficient stœchiométrique positif du gaz,

$$\nu_{ag} = -\nu_{a\ell} > 0 \quad (29)$$

Durant la vaporisation, il y a coexistence des phases liquide et gazeuse, ce qui signifie que le liquide et le gaz sont à l'équilibre chimique,

$$\mu_g = \mu_\ell \quad (30)$$

L'affinité chimique de la vaporisation est nulle,

$$\mathcal{A}_a = - \sum_{\alpha \in \{\ell, g\}} \nu_{a\alpha} \mu_\alpha = -\nu_{a\ell} \mu_\ell - \nu_{ag} \mu_g = 0 \quad (31)$$

Ainsi, compte tenu du fait que le fluide de van der Waals est à l'équilibre thermique et mécanique avec la source froide à température T^- durant la vaporisation, la source d'entropie est nulle,

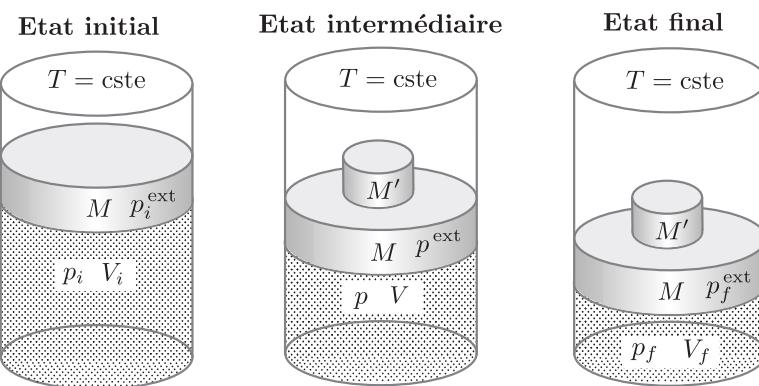
$$\Sigma_S = \frac{1}{T^-} \mathcal{A}_a \Omega_a = 0 \quad (32)$$

ce qui signifie que la vaporisation est réversible dans ce cycle.


Problème 3 : Compression isotherme irréversible d'un gaz parfait (21 points)

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 10	<input type="checkbox"/> 11	<input type="checkbox"/> 12	<input type="checkbox"/> 13	<input type="checkbox"/> 14	<input type="checkbox"/> 15
<input type="checkbox"/> 16	<input type="checkbox"/> 17	<input type="checkbox"/> 18	<input type="checkbox"/> 19	<input type="checkbox"/> 20	<input type="checkbox"/> 21										

Laisser les cases blanches vides



On modélise la compression isotherme d'un système thermodynamique fermé constitué de N moles de gaz parfait enfermé dans un cylindre vertical par un piston de masse M et d'aire A . Le cylindre est placé dans une enceinte dans laquelle on a fait le vide. Il n'y a donc pas de pression atmosphérique à considérer dans ce problème. De plus, le système est maintenu à température constante T par contact avec un réservoir de chaleur.

Dans l'état initial i , avant la compression, le gaz parfait de pression p_i est à l'équilibre mécanique avec le piston qui exerce une pression p_i^{ext} sur le gaz. On pose alors un poids de masse M' sur le piston ce provoque la compression du gaz parfait à pression p due à la pression p^{ext} exercée sur le gaz par le piston et le poids : c'est l'état intermédiaire de compression. Dans l'état final f , après la compression, le gaz parfait de pression p_f a atteint l'équilibre mécanique avec le piston et le poids qui exercent une pression p_f^{ext} sur lui.

$$p_i = p_i^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad p < p^{\text{ext}} = p_f^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad p_f = p_f^{\text{ext}}$$

Le travail effectué de manière irréversible par le piston et le poids sur le gaz durant la compression isotherme de l'état initial i à l'état final f s'écrit,

$$W_{i \rightarrow f} = - \int_i^f p^{\text{ext}} dV$$

Durant la compression isotherme, la source d'entropie du système s'écrit,

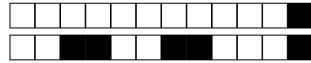
$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (p - p^{\text{ext}}) \dot{V}$$

L'entropie générée de manière irréversible dans le système lors de la compression isotherme est définie comme,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = \int_i^f \delta S_{\Sigma} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S dt$$

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M du piston, de la masse M' du poids, du nombre de moles N de gaz parfait, de la température T , de la constante des gaz parfaits R et des grandeurs spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (3 points) Montrer que la variation d'entropie s'écrit en fonction de la chaleur $Q_{i \rightarrow f}$ restituée au réservoir de chaleur durant la compression isotherme $i \rightarrow f$,

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{Q_{i \rightarrow f}}{T} + S_{\Sigma i \rightarrow f}$$

L'équation de bilan d'entropie pour le gaz parfait à température T s'écrit,

$$\dot{S} = I_S + \Sigma_S = \frac{I_Q}{T} + \Sigma_S \quad (1)$$

L'intégration de l'équation de bilan durant la compression isotherme à température T constante par rapport au temps du temps initial t_i au temps final t_f s'écrit,

$$\int_{t_i}^{t_f} \dot{S} dt = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} I_Q dt + \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S dt \quad (2)$$

Durant la compression isotherme $i \rightarrow f$, la variation d'entropie $\Delta S_{i \rightarrow f}$ s'écrit,

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \int_{S_i}^{S_f} dS = \int_{t_i}^{t_f} \dot{S} dt \quad (3)$$

la chaleur $Q_{i \rightarrow f}$ restituée au réservoir de chaleur est de la forme,

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f \delta Q = \int_{t_i}^{t_f} I_Q dt \quad (4)$$

et l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ générée de manière irréversible s'écrit,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = \int_i^f \delta S_{\Sigma} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S dt \quad (5)$$

En substituant les grandeurs physiques (3), (4) et (5) dans l'équation de bilan intégrée par rapport au temps (2) durant la compression isotherme, on obtient le résultat cherché.

2. (3 points) Montrer que les rapports de la pression finale p_f et de la pression initiale p_i ainsi que du volume final V_f et du volume initial V_i s'écrivent,

$$\frac{p_f}{p_i} = 1 + \frac{M'}{M} \quad \text{et} \quad \frac{V_f}{V_i} = \frac{M}{M + M'}$$

Dans l'état d'équilibre mécanique initial i , la pression p_i du gaz parfait est la pression p_i^{ext} exercée le piston de masse M d'aire A sur le gaz. Dans l'état d'équilibre mécanique final f , la pression p_f du gaz parfait est la pression p_f^{ext} exercée par le piston et le poids de masse totale $M + M'$ sur le gaz. Ainsi, on en déduit les relations suivantes,

$$p_i = p_i^{\text{ext}} = \frac{Mg}{A} \quad \text{et} \quad p_f = p_f^{\text{ext}} = \frac{(M + M')g}{A} \quad (6)$$

où g est l'intensité du champ gravitationnel. Ainsi, le rapport des pressions s'écrit,

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{p_f^{\text{ext}}}{p_i^{\text{ext}}} = \frac{M + M'}{M} = 1 + \frac{M'}{M} \quad (7)$$

Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait, les volumes et les pressions sont liés par la relation,

$$p_i V_i = p_f V_f = pV = NRT \quad (8)$$

Ainsi le rapport des volumes s'écrit,

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{NRT}{p_f} \frac{p_i}{NRT} = \frac{p_i}{p_f} = \frac{M}{M + M'} \quad (9)$$



3. (3 points) Calculer le travail $W_{i \rightarrow f}$ effectué par le piston et le poids sur le gaz et la chaleur restituée $Q_{i \rightarrow f}$ au réservoir de chaleur durant la compression isotherme irréversible $i \rightarrow f$.

Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait (8) et des relations entre les pressions (7),

$$p^{\text{ext}} = p_f^{\text{ext}} = p_f \quad (10)$$

on obtient le travail effectué par le piston et le poids sur le gaz durant la compression isotherme irréversible $i \rightarrow f$,

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f} &= - \int_i^f p^{\text{ext}} dV = - p_f \int_i^f dV = - p_f (V_f - V_i) \\ &= - p_f \left(\frac{NRT}{p_f} - \frac{NRT}{p_i} \right) = \left(\frac{p_f}{p_i} - 1 \right) NRT = \frac{M'}{M} NRT > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

La variation d'énergie interne du gaz parfait durant la compression isotherme est nulle,

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = C_V \Delta T_{i \rightarrow f} = cNR \Delta T_{i \rightarrow f} = 0 \quad (12)$$

car $\Delta T_{i \rightarrow f} = 0$. A l'aide du premier principe, on en déduit alors la chaleur restituée au réservoir de chaleur,

$$Q_{i \rightarrow f} = \Delta U_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = - W_{i \rightarrow f} = \left(1 - \frac{p_f}{p_i} \right) NRT = - \frac{M'}{M} NRT < 0 \quad (13)$$

4. (2 points) Calculer la variation d'entropie $\Delta S_{i \rightarrow f}$ du gaz parfait durant la compression isotherme irréversible $i \rightarrow f$.

La relation de Gibbs pour la compression isotherme du gaz parfait s'écrit,

$$dU = T dS - p dV = C_V dT = 0 \quad (14)$$

Ainsi, compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait (8), la différentielle de l'entropie est,

$$dS = \frac{p dV}{T} = \frac{p dV}{T} = NR \frac{dV}{V} \quad (15)$$

En intégrant la différentielle de l'entropie (15) compte tenu du rapport des volumes (9), on obtient la variation de l'entropie,

$$\begin{aligned} \Delta S_{i \rightarrow f} &= \int_{S_i}^{S_f} dS = \int_i^f \frac{p dV}{T} = NR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = NR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \\ &= NR \ln \left(\frac{M}{M + M'} \right) = - NR \ln \left(1 + \frac{M'}{M} \right) < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

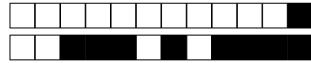
5. (2 points) Montrer que l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ générée de manière irréversible dans le système durant la compression isotherme irréversible $i \rightarrow f$ s'écrit,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = NR \left(\frac{M'}{M} + \ln \left(\frac{M}{M + M'} \right) \right)$$

Solution 1: D'après l'équation de bilan d'entropie intégrée par rapport au temps durant la compression irréversible $i \rightarrow f$, l'entropie générée $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ dans le système s'écrit,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = \Delta S_{i \rightarrow f} - \frac{Q_{i \rightarrow f}}{T} \quad (17)$$

En substituant la variation d'entropie (16) et la chaleur (13) échangée durant la compression irréversible $i \rightarrow f$ dans l'entropie générée (17), on obtient le résultat cherché.



Solution 2: Compte tenu de la relation $p^{\text{ext}} = p_f$, l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ générée de manière irréversible dans le système s'écrit,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{T} (p - p^{\text{ext}}) \dot{V} dt = \int_i^f \frac{p dV}{T} - \frac{p_f}{T} \int_{V_i}^{V_f} dV \quad (18)$$

Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait (8), l'entropie (18) devient,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = NR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} - \frac{p_f}{T} \int_{V_i}^{V_f} dV = NR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) - \frac{p_f}{T} (V_f - V_i) \quad (19)$$

Compte tenu des rapports entre les pressions (7) et les volumes (9), l'entropie (19) devient,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = -NR \ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right) + NR \left(\frac{p_f}{p_i} - 1 \right) = NR \left(\frac{M'}{M} - \ln \left(1 + \frac{M'}{M} \right) \right) \quad (20)$$

ce qui donne le résultat cherché.

6. (3 points) Dans la limite où le rapport des masses est suffisamment faible,

$$\ln(1+x) \simeq x \quad \text{où} \quad x = \frac{M'}{M} \quad \text{et} \quad 0 < x \ll 1$$

montrer explicitement que la compression devient réversible et en déduire explicitement une relation entre les pressions p et p^{ext} dans ce cas.

Dans la limite où le rapport des masses $x = M'/M$ est suffisamment faible, l'entropie générée par irréversibilité dans le système s'annule,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = NR \left(\frac{M'}{M} - \ln \left(1 + \frac{M'}{M} \right) \right) \simeq NR \left(\frac{M'}{M} - \frac{M'}{M} \right) = 0 \quad (21)$$

ce qui signifie que dans cette limite, la compression est réversible. On en déduit l'identité suivante,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = \int_i^f \delta S_{\Sigma} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S dt = 0 \quad (22)$$

Par conséquent, la source d'entropie est nulle,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (p - p^{\text{ext}}) \dot{V} = 0 \quad (23)$$

où $\dot{V} < 0$. On en conclut que le gaz parfait et le piston avec le poids sont à l'équilibre mécanique,

$$p = p^{\text{ext}} \quad (24)$$

7. (3 points) Calculer le travail $W_{i \rightarrow f}^0$ effectué sur le gaz par le piston et le poids durant une compression réversible $i \rightarrow f$ et montrer que les travaux effectués de manière réversible et irréversible sont égaux, c'est-à-dire $W_{i \rightarrow f}^0 = W_{i \rightarrow f}$, dans la limite où le rapport des masses est suffisamment faible, c'est-à-dire $x = M'/M \ll 1$.

Le travail $W_{i \rightarrow f}^0$ effectué sur le gaz par le piston et le poids durant une compression réversible $i \rightarrow f$ s'écrit,

$$W_{i \rightarrow f}^0 = - \int_i^f p dV = -NRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -NRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = NRT \ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right) \quad (25)$$

Dans la limite où le rapport des masses est suffisamment faible $M'/M \ll 1$, compte tenu du rapport des pressions (7), le travail effectué durant une compression réversible est égal au travail effectué durant une compression irréversible,

$$W_{i \rightarrow f}^0 = NRT \ln \left(1 + \frac{M'}{M} \right) \simeq \frac{M'}{M} NRT = W_{i \rightarrow f} \quad (26)$$



8. (**BONUS : 2 points**) Montrer qu'en général la compression isotherme est irréversible explicitement à l'aide de l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$.

Solution 1: Afin de déterminer le domaine en M'/M où ce signe est positif, on calcule le zéro de l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = NR \left(\frac{M'}{M} - \ln \left(1 + \frac{M'}{M} \right) \right) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{M'}{M} = 0 \quad (27)$$

La dérivée de l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ par rapport au rapport des masses est positive,

$$\frac{dS_{\Sigma i \rightarrow f}}{d\left(\frac{M'}{M}\right)} = NR \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{M'}{M}} \right) = NR \frac{\frac{M'}{M}}{1 + \frac{M'}{M}} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{M'}{M} > 0 \quad (28)$$

Ainsi, l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ générée dans le système est positive et la compression est irréversible,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} > 0 \quad (29)$$

Solution 2: Etant donné que la pression p^{ext} exercée par le piston et le poids sur le gaz est supérieure à la pression p du gaz durant la compression, c'est-à-dire $p^{\text{ext}} > p$, et que le volume diminue, c'est-à-dire $\dot{V} < 0$, la source d'entropie est positive,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (p - p^{\text{ext}}) \dot{V} > 0 \quad (30)$$

Ainsi, l'entropie $S_{\Sigma i \rightarrow f}$ générée dans le système est positive et la compression est irréversible,

$$S_{\Sigma i \rightarrow f} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma_S dt = \frac{1}{T} \int_i^f (p - p^{\text{ext}}) dV > 0 \quad (31)$$

car $dV = \dot{V} dt < 0$.

